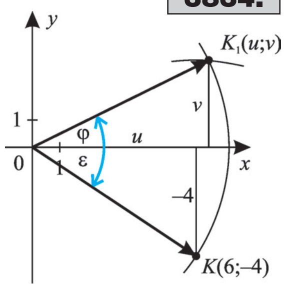
A kör

A kör egyenlete

3822. *a)* $x^2 + y^2 = 16$; *b)* $4x^2 + 4y^2 = 25$; *c)* $16x^2 + 16y^2 = 3$; *d)* $4x^2 + 4y^2 = 9$.
3823. *a)* $x^2 + y^2 = 16 + 49$; *b)* $x^2 + y^2 = 5$; *c)* $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.
3824. *a)* $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 9$, rendezve $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 32 = 0$;
b) $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 13 = 0$; *c)* $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$; *d)* $x^2 + y^2 - 4x - 8{,}25 = 0$;
e) $x^2 + y^2 + 6y - 4 = 0$; *f)* $x^2 + y^2 + 10x + 6y + 32 = 0$.
3825. *a)* $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$; *b)* $x^2 + y^2 + 6y - 8y = 0$; *c)* $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$;
d) $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 3 = 0$; *e)* $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 10\sqrt{2} - 4 = 0$. (A kör középpontjának koordinátái $C(-2; 3)$).
3826. A kör egyenlete: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$. Legyen $x = -1$. $y_1 = 7, y_2 = -1$. Az ordináták rendre: $3 + \sqrt{21}$ és $3 - \sqrt{21}$ $3 + 2\sqrt{6}$ és $3 - 2\sqrt{6}$; 8 és -2; 8 és -2; $3 + 2\sqrt{6}$ és $3 - 2\sqrt{6}$ $3 + \sqrt{21}$ és $3 - \sqrt{21}$. Az abszcisszák rendre: $y = 1$ esetén $2 + \sqrt{21}$ és $2 - \sqrt{21}$ $y = 0$ esetén $x_1 = 6$, $x_2 = -2$; $y = -5$ esetén nincs megoldás.
3827. *a)* $x^2 - 6x + y^2 + 4 = 0$. *b)* $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0$; *c)* $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 7 = 0$;
d) $12x^2 + 12y^2 + 28x - 57y - 39 = 0$.
3828. $x^2 + y^2 = 20$. Belső pont az A, mert $3^2 + 0^2 < 20$. A többi pont a körön kívül van, mert például a B pontra $5^2 + 0^2 > 20$.
3829. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$. Az A pontra $(-3+1)^2 + (-2)^2 = 8 < 25$, tehát A a körön belül van. C, E, F a körön van, B és D a körön kívül van.
3830. A kör egyenlete: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$. $2x - y = \pm\frac{3}{2}$. Ha $y = 2x + \frac{3}{2}$, akkor a $3^x + 3^{y-\frac{1}{2}} = 4$ egyenletben az y helyére $2x + \frac{3}{2}$-et helyettesítve: $3^x + 3^{2x+1} = 4$ adódik. Innen $x = 0$. Ekkor $y = \frac{3}{2}$. A $P\left(0; \frac{3}{2}\right)$ külső pont, mert $(0-2)^2 + \left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 > 4$. Ha $y = 2x - \frac{3}{2}$, akkor $(3^x)^2 + 9 \cdot 3^x - 36 = 0$. Innen $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$. A $Q\left(1; \frac{1}{2}\right)$ pont a kör belső pontja, mert $(1-2)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 < 4$.
3831. A kör egyenlete: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$. A $\left(2x - y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ egyenletből $2x - y + \frac{1}{2} = \pm\frac{3}{2}$. Ha $y = 2x + 2$, akkor az egyenletrendszer gyöke $P(0; 2)$, amely a körön kívül van. Ha $y = 2x - 1$, akkor a megoldás $(1; 1)$.
3832. $(x+3)^2 + y^2 = 9$.
3833. $x^2 + (y-2)^2 = 4$.

V

3834.



3834. Az egybevágósági transzformációknál a sugár hossza nem változik. *a)* $r = 6$, $K(6; 4)$; *b)* $r = 6$, $K(-6; -4)$; *c)* $r = 6$, $K(-6; 4)$; *d)* Legyen az origó az O pont, a kör középpontja a K pont. Ekkor az OK vektor koordinátái $(6; -4)$. Az eltolt kör K_1 középpontjának koordinátáit az $\overrightarrow{OK} + \mathbf{v}$ vektor koordinátái adják: $K_1(8; -1)$. *e)* $r = 6$, $K(1; -5)$;
f) $\overrightarrow{OK}(6; -4)$, 90°-kal elforgatva $\overrightarrow{OK_1}(6; 4)$, $r = 6$. *g)* $K(-4; -6)$; $r = 6$; *h)* $\varphi + |\varepsilon| = 60°$, $\operatorname{tg}(\varphi + |\varepsilon|) = \dfrac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}|\varepsilon|}{1 - \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}|\varepsilon|}$.
$\sqrt{3} = \dfrac{\operatorname{tg}\varphi + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3}\operatorname{tg}\varphi}$ egyenletből $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{24 - 13\sqrt{3}}{3}$ (3834. ábra). $\left|\overrightarrow{OK}\right| = \left|\overrightarrow{OK_1}\right| = \sqrt{52}$. Oldjuk meg az $u^2 + v^2 = 52$ és a $\dfrac{v}{u} = \dfrac{24 - 13\sqrt{3}}{3}$ egyenletrendszert: $u = 3 + 2\sqrt{3}$, $v = 3\sqrt{3} - 2$.
A kör egyenlete: $\left(x - 3 - 2\sqrt{3}\right)^2 + \left(y - 3\sqrt{3} + 2\right)^2 = 36$;
i) $r = 12$, $K(12; -8)$; *j)* $r = 3$, $K(3; -2)$.

3835. *a)* $(x - 1)^2 + y^2 = 1$; *b)* $(x + 1)^2 + y^2 = 1$; *c)* $x^2 + (y - 1)^2 = 1$; *d)* $x^2 + (y + 1)^2 = 1$.

3836. *a)* $K_1(3; 5)$, $K_2(3; -5)$, $r = 5$.
Két megoldás van: $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$; $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$; *b)* $(x \pm 5)^2 + (y + 6)^2 = 25$;
c) Négy megoldás van: $(x \pm 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ vagy $(x \pm 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$.

3837. A középpont koordinátái: $K(\pm r; r)$ vagy $K(\pm r; -r)$, a sugár r. Négy megoldás van:
$x^2 + y^2 \pm 2rx - 2ry + r^2 = 0$ és $x^2 + y^2 \pm 2rx + 2ry + r^2 = 0$.

3838. *a)* A középpont koordinátái $(a; 2a)$ a sugár $|2a|$.
A kör egyenlete $(x - a)^2 + (x - 2a)^2 = 4a^2$; *b)* $K(a; 2a)$, $r = |a|$, $x^2 + y^2 - 2ax - 4ay + 4a^2 = 0$;
c) A kör sugara: $r^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$, Pitagorasz tétele szerint. Egyenlete: $x^2 + y^2 - 2ax - 4ay = 0$.

3839. *a)* $P(2; 9)$. Mivel a kör mindkét tengelyt érinti, a középpontjának koordinátái: $K(r; r)$ és sugara r. A kör egyenlete: $(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$. Ekkor $(2 - r)^2 + (9 - r)^2 = r^2$. Innen $r_1 = 5$, $r_2 = 17$. Két megoldás van: $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ és $(x - 17)^2 + (y - 17)^2 = 289$.
b) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ és $(x - 15)^2 + (y - 15)^2 = 225$; *c)* $(x - 10)^2 + (y - 10)^2 = 100$ és $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$; *d)* $\left(x + 8 + \sqrt{30}\right)^2 + \left(y + 8 + \sqrt{30}\right)^2 = \left(8 + \sqrt{30}\right)^2$ és
$\left(x + 8 - \sqrt{30}\right)^2 + \left(y + 8 - \sqrt{30}\right)^2 = \left(8 - \sqrt{30}\right)^2$.

3840. *a)* $K(6; 7)$, $r = \left|\dfrac{5 \cdot 6 - 12 \cdot 7 - 24}{\sqrt{5^2 + 12^2}}\right| = 6$, $(x - 6)^2 + (y - 7)^2 = 36$;
b) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = \dfrac{32}{37}$.

3841. *a)* $P(9; 9)$, $r = 5$, $K(u; 5)$, $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$. Mivel P rajta van a körön, azért $(9 - u)^2 + (9 - 5)^2 = 5^2$. Innen $u_1 = 12$, $u_2 = 6$. Két megoldás van: $(x - 12)^2 + (y - 5)^2 = 25$ és $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 25$. *b)* $(x - 5)^2 + (y - 12)^2 = 25$ és $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 25$.

3842. *a)* Az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenlete: $3x - 11y = 2$. Ha $y = 0$, $x = \dfrac{2}{3}$.
$K\left(\dfrac{2}{3}; 0\right)$. $r^2 = AK^2 = \dfrac{325}{9}$. A kör egyenlete: $\left(x - \dfrac{2}{3}\right)^2 + y^2 = \dfrac{325}{9}$. *b)* $x^2 + \left(y + \dfrac{2}{11}\right)^2 = \dfrac{4745}{121}$.

3843. *a)* $\left(x - \dfrac{8}{3}\right)^2 + y^2 = \dfrac{85}{9}$; *b)* $x^2 + (y + 8)^2 = 125$.

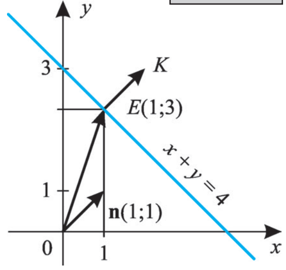
3844. *a)* $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$. *b)* $(x + 6)^2 + (y + 2)^2 = 26$; *c)* $(x + 1)^2 + (y - 11)^2 = 100$;
d) $\left(x - \dfrac{85}{12}\right)^2 + \left(y - \dfrac{9}{4}\right)^2 = \dfrac{2669}{72}$.

3845. *a)* $P_1(4; -1)$, $P_2(-3; -2)$, a kör (u, v) középpontja illeszkedik a P_1P_2 szakasz felezőmerőlegesére, a $7x + y = 2$ egyenletű egyenesre. $r = |v|$. Felírhatjuk a következő egyenletrendszert: $\left.\begin{matrix} 7u + v = 2 \\ (4 - u)^2 + (-1 - v)^2 = v^2 \end{matrix}\right\}$. Két megoldás van: $u_1 = 1$, $v_1 = -5$, $u_2 = 21$, $v_2 = -145$. A körök egyenletei: $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 25$ és $(x - 21)^2 + (y + 145)^2 = 145^2$. *b)* $\left[x - \left(4 + 2\sqrt{2}\right)\right]^2 + \left[y - \left(5 + 2\sqrt{2}\right)\right]^2 = \left(5 + 2\sqrt{2}\right)^2$ és $\left[x - \left(4 - 2\sqrt{2}\right)\right]^2 + \left[y - \left(5 - 2\sqrt{2}\right)\right]^2 = \left(5 - 2\sqrt{2}\right)^2$;
c) $(x - 13)^2 + y^2 = 169$ és $(x - 5)^2 + (y - 8)^2 = 25$.

3846. *a)* Az érintési pont koordinátái: $E(4; 1)$. E-ben az $y = x - 3$ egyenletű egyenesre emelt merőleges egyenlete: $y = -x + 5$. A kör középpontja az $y = -x + 5$ egyenletű egyenes és a $P(0; 4)$, $E(4; 1)$ szakaszt felező merőleges egyenes közös pontja. A felezőmerőleges egyenlete
$4x - 3y = \dfrac{1}{2}$. $K\left(\dfrac{31}{14}; \dfrac{39}{14}\right)$, $r^2 = KP^2 = \dfrac{625}{98}$. A kör egyenlete: $\left(x - \dfrac{31}{14}\right)^2 + \left(y - \dfrac{39}{14}\right)^2 = \dfrac{625}{98}$.
b) $(x - 2{,}5)^2 + (y + 5{,}5)^2 = 112{,}5$.

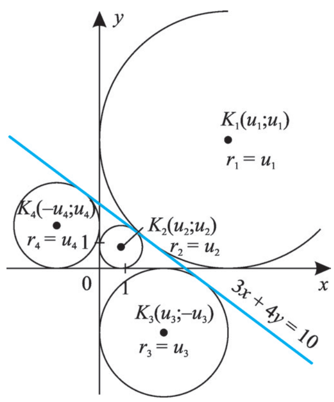
3847. *a)* Az érintési pont koordinátái: $E(1; 3)$, $r = \sqrt{2}$. (3847. ábra). Az $x + y = 4$ egyenletű egyenes normálvektora: $\mathbf{n}(1; 1)$. Az egységvektor: $\mathbf{n}^0\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. A kör sugara: $r = \sqrt{2} = \left|\overrightarrow{EK}\right|$. Mivel $\left|\overrightarrow{EK}\right| = \sqrt{2}\mathbf{n}^0$, ezért $\overrightarrow{EK}$ vektor koordinátái: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}; \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = (1; 1)$. A K középpontra $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EK}$, ezért a K pont koordinátái $(1 + 1; 3 + 1)$, $K(2; 4)$. A K-nak E-re vonatkozó tükörképe is megoldás: $K_1(0; 2)$. A körök egyenletei: $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 2$ és $x^2 + (y - 2)^2 = 2$;
b) $x^2 + (y + 4)^2 = 5$ és $(x + 2)^2 + y^2 = 5$.

3847.



3848. *a)* $P_1(-2; 4)$, $P_2(4; 2)$, $r = \sqrt{20}$. A kör $K(u; v)$ középpontja rajta van a P_1P_2 szakasz felezőmerőlegesén, amelynek egyenlete: $y = 3x$. Másrészt $KP_1 = \sqrt{20}$, azaz $(u + 2)^2 + (v - 4)^2 = 20$ és $v = 3u$. Ebből az egyenletrendszerből $u_2 = 0$, $v_1 = 0$, $u_2 = 2$, $v_2 = 6$ adódik. Két megoldás van: $x^2 + y^2 = 20$ és $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 20$;

3854.



b) $(x-8)^2 + (y-1)^2 = 25$ és $(x-1)^2 + (y+6)^2 = 25$;
c) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 10$ és $(x+1)^2 + (y-6)^2 = 10$.

3849. Legyen $e_1\colon y = 2x + 14$ és $e_2\colon y = 2x - 6$. $e_1 \parallel e_2$ a középpárhuzamos egyenlete: $e\colon y = 2x + 4$. Az e_2 egyik pontja $Q(3;\, 0)$. Q pontnak az e_1 egyenestől mért távolsága a keresett kör sugara: $r = 4\sqrt{5}$. A kör K középpontjának $(u;\, v)$ koordinátáira a következő egyenletrendszert írhatjuk fel, felhasználva az adott $P(3;\, 4)$ pont koordinátáit: P rajta van a körön, ezért $(3-u)^2 + (4-v)^2 = 20$, másrészt a kör középpontja illeszkedik az e középvonalra, ezért $v = 2u + 4$. Az egyenletrendszerből két megoldást kapunk:
$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 20$ és $(x-2{,}2)^2 + (y-8{,}4)^2 = 20$.

3850. Vegyük észre, hogy az adott egyenesek párhuzamosak. Két megoldás van:
$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ és $x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$.

3851. $r = \dfrac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$. Megoldások: $(x-4)^2 + (y-8)^2 = 80$ és $(x+4)^2 + (y+8)^2 = 80$.

3852. $K(4;\, 4)$, $r = \sqrt{32}$. $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 32$.

3853. A háromszög köré írható kör sugara $r = \sqrt{8}$. A $K(1;\, 4)$ pont a háromszög súlypontja is. A BC oldal A_1 felezőpontja az A és a K pont felhasználásával kiszámítható, mert $AK : KA_1 = 2 : 1$. $A_1(2;\, 5)$. A BC oldal egyenlete: $x + y = 7$, a háromszög köré írható kör egyenlete: $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8$. A BC oldal és a kör közös pontjai adják a szabályos háromszög csúcspontjait: $B\left(2+\sqrt{3};\;\; 5-\sqrt{3}\right)$, $C\left(2-\sqrt{3};\;\; 5+\sqrt{3}\right)$.

3854. Legyen $u_1 > 0$, $u_2 > 0$, $u_3 > 0$, $u_4 > 0$. Ekkor $r_1 = u_1$, $r_2 = u_2$, $r_3 = u_3$ és $r_4 = u_4$. Az egyenes normálegyenlete: $\dfrac{3x + 4y - 10}{5} = 0$, ahol az egységvektor $\mathbf{n}^0\left(\dfrac{3}{5};\; \dfrac{4}{5}\right)$. Alkalmazva a távolságképletet, és figyelembe véve, hogy az egységvektor a K_1, K_2, K_3, K_4 pontokat tartalmazó félsíkba mutat-e, vagy sem, a 3854. ábra alapján felírhatjuk a következő egyenleteket:
$$\frac{3u_1 + 4u_1 - 10}{5} = u_1,\quad -\frac{3u_2 + 4u_2 - 10}{5} = u_2,\quad \frac{3u_3 + 4u_3 - 10}{5} = u_3,\quad -\frac{-3u_4 + 4u_4 - 10}{5} = u_4.$$
Innen kapjuk a körök középpontjainak koordinátáit és a körök sugarait. $K_1(5;\, 5)$, $r_1 = 5$; $K_2\left(\dfrac{5}{6};\; \dfrac{5}{6}\right)$, $r_2 = \dfrac{5}{6}$; $K_3(2{,}5;\; -2{,}5)$, $r_3 = 2{,}5$; $K_4\left(-\dfrac{5}{3};\; \dfrac{5}{3}\right)$ $r_4 = \dfrac{5}{3}$.

3855. $K(2;\, 5)$, $r = 2$. $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$.

3856. A Q pont koordinátái: $(0;\, y)$. Ekkor $PQ = 3\sqrt{10}$ a következőképpen írható fel: $9^2 + (y-5)^2 = 90$. Innen $y_1 = 2$, $y_2 = 8$. A $Q_1(0;\, 2)$ és a $P(9;\, 5)$ pontok meghatározta szakasz felezőmerőlegesére, másrészt az $y = 2$ egyenletű egyenesre illeszkedik a keresett kör középpontja. A $3x + y = 17$, $y = 2$ egyenletrendszerből $K_1(5;\, 2)$, $r_1 = 5$ adódik. Hasonlóképpen számítható ki a $Q_2(0;\, 8)$ pontban érintő kör középpontjának koordinátái és a kör sugara. $K_2(5;\, 8)$, $r_2 = 5$. Megoldások: $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 25$ és $(x-5)^2 + (y-8)^2 = 25$.

3857. A kör középpontja az AB átfogó szakasz felezőpontja: $K_1\left(\frac{5}{2}; 3\right)$. Az AC oldal egyenlete: $-3x + 4y = 7$. A BC befogó egyenes egyenlete: $-4x + 3y = -26$. A C csúcs koordinátái: $C(5; -2)$. A kör egyenlete: $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 = \frac{125}{4}$.

3858. $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 20$.

3859. Az érintő kör középpontja rajta van az $y = x$ egyenletű egyenesen: $K(x; x)$. K-nak az origótól való távolsága: $OK^2 = 2x^2$. K az $x = 1$ egyenletű egyenestől $|x - 1|$ távolságra van. Ekkor $2x^2 = (x - 1)^2$. Innen $x_1 = -1 + \sqrt{2}$, $x_2 = -1 - \sqrt{2}$. Két megoldás van.
$r_1 = 1 - \left(-1 + \sqrt{2}\right) = 2 - \sqrt{2}$, $r_2 = 1 - \left(-1 - \sqrt{2}\right) = 2 + \sqrt{2}$. A körök egyenletei:
$\left[x - \left(-1 + \sqrt{2}\right)\right]^2 + \left[y - \left(-1 + \sqrt{2}\right)\right]^2 = \left(2 - \sqrt{2}\right)^2$, $\left[x + 1 + \sqrt{2}\right]^2 + \left[y + 1 + \sqrt{2}\right]^2 = \left(2 + \sqrt{2}\right)^2$.

3860. Ábrázoljuk az $y = \frac{5}{2}|x|$ egyenletű egyenest és az $x^2 + y^2 = 9$ egyenletű kört. Két pont felel meg: $P_1(0; 1)$, $P_2(0; 2)$.

3861. Elegendő a téglalapot az egyik átlójával megfelezni. Megoldás: négyzet, $t = 2r^2$.

3862. Az érintési pont: $P(-2; 4)$. Az adott egyenes normálvektora: $\mathbf{n}(4; -3)$, a normálvektor hossza $|\mathbf{n}| = \sqrt{16 + 9} = 5$. Az egységvektor koordinátái: $\mathbf{n}^0\left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$ Ekkor a $\overrightarrow{PK}$ vektor koordinátái: $10 \cdot \mathbf{n}^0(8; -6)$. $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PK}$ innen $\overrightarrow{OK}(6; -2)$. A keresett kör középpontja: $K(6; -2)$. Még egy megoldást kapunk, ha K-t a P-re tükrözzük. A körök egyenletei:
$(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 100$ és $(x + 10)^2 + (y - 10)^2 = 100$.

3863. *q)*; *s)*; *w)* nem kör egyenlete, *v)* pontkör ($r = 0$), a többi kör egyenlete. Vizsgáljuk például a *j)* egyenletét: $x^2 + 2{,}4x + y^2 - 3y = 2{,}56$. Innen $(x + 1{,}2)^2 + (y - 1{,}5)^2 = 1{,}2^2 + 1{,}5^2 + 2{,}56$. $(x + 1{,}2)^2 + (y - 1{,}5)^2 = 6{,}25$. $K(-1{,}2; 1{,}5)$, $r = 2{,}5$; pl.: *c)* $K(0; 0)$, $r = \sqrt{20}$; *h)* $K(0; 4)$, $r = 3$; *k)* $K\left(\frac{5}{2}; 0\right)$, $r = 5$; *l)* $K\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$, $r = 4$; *m)* Osszuk el az egyenletet 3-mal. $K\left(\frac{2}{3}; 1\right)$, $r = \frac{\sqrt{58}}{3}$; *n)* $K\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$, $r = \frac{\sqrt{10}}{4}$; *o)* $K(a; 0)$, $r = |a|$; *t)* $K\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$, $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

3864. *a)* A $K(-2; 1)$ középpontú, $r = \sqrt{5}$ sugarú kör külső pontjainak koordinátái. *b)* $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = -1$. Ilyen pont nem létezik; *c)* $P(3; -4)$ pont; *d)* $(x - y)(x + y - 2) = 0$. Az $x - y = 0$ és az $x + y - 2 = 0$ egyenletű egyenesek pontjainak koordinátái.

3865. *a)* $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$ és $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ körök egyenletei. $K_1(3; -4)$, $r_1 = 5$, $K_2(-1; 1)$, $r_2 = 1$. K_1K_2 egyenes egyenlete: $5x + 4y = -1$. *b)* $17x + 8y = 11$.

3866. $\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2A}\right)^2 = \frac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2}$. Szükséges és elégséges, hogy $A \neq 0$ és $B^2 + C^2 > 4AD$ legyen. *a)* $A \neq 0$ és $D = 0$; *b)* $A \neq 0$ és $C = 0$; *c)* $A \neq 0$ és $B = 0$; *d)* Szüksé-

V

ges és elégséges, hogy $y = 0$ esetén az $AX^2 + BX + D = 0$ egyenletnek pontosan egy gyöke legyen. $B^2 = 4AD$ és $A \neq 0$; *e)* $A \neq 0$ és $C^2 = 4AD$; *f)* $B^2 = 4AD$, $B = C$, $A \neq 0$.

3867. $K(5; 3)$, $r = 5$ $KP = \sqrt{10}$, $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 24 = 0$.

3868. $\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = r^2$. Tegyük fel, hogy a $P_1(x_1; y_1)$, és a $P_2(x_2; y_2)$, rácspontok rajta vannak a fenti körön. Ekkor $\left(x_1 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \left(x_2 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y_2 - \frac{1}{3}\right)^2$.

Innen $x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 - \frac{2}{3}(y_1 - y_2) = 2\sqrt{2}(x_1 - x_2)$. Ha $x_1 \neq x_2$, akkor a bal oldal racionális, a jobb oldal irracionális $\sqrt{2}$ miatt! Tehát $x_1 = x_2$. $y_1^2 - y_2^2 - \frac{2}{3}(y_1 - y_2) = 0$, innen $(y_1 - y_2)\left(y_1 + y_2 - \frac{2}{3}\right) = 0$. $y_1 = y_2$, vagy $y_1 + y_2 = \frac{2}{3}$. Utóbbi nem lehetséges, mert $y_1, y_2 \in \mathbf{Z}$. Ellentmondásra jutottunk, ezért igaz a feladat állítása.

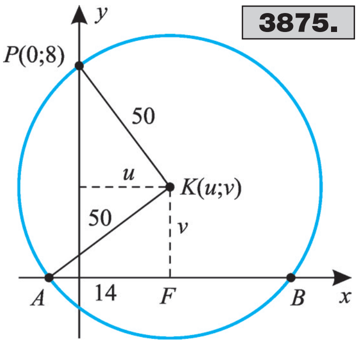
3869. $\left(x - \sqrt{5}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = r^2$. Legyen $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, rácspontok. Ekkor $x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 - \frac{2}{3}(y_1 - y_2) = 2\sqrt{5}(x_1 - x_2)$. Innen adódik, hogy $x_1 = x_2$ és $y_1 = y_2$.

3870. Legyen $Q(0; 1)$. Q rajta van az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű körön. Tekintsük a Q ponton átmenő $y = mx + 1$ egyenletű egyeneseket.
Az egyenesnek és a körnek közös pontját az $x^2 + y^2 = 1$,
$y = mx + 1$ egyenletekből álló egyenletrendszer gyöke (*i*) adja. $x^2 + (mx + 1)^2 = 1$. Innen $(m^2 + 1)x^2 + 2mx = 0$. $x_1 = 0$, $y_4 = 1$, $x_2 = -\frac{2m}{m^2 + 1}$; $y_2 = \frac{1 - m^2}{m^2 + 1}$. Minden racionális m-re x_2 és y_2 is racionális. A feladat állítása igaz.

3871. *a)* Az x tengely pontjainak második koordinátája 0, az y tengely pontjainak első koordinátája 0. Ha $y = 0$, $M_1(6; 0)$, $M_2(-2; 0)$, ha $x = 0$, $M_3\left(0; 3 + \sqrt{21}\right)$, $M_4\left(0; 3 - \sqrt{21}\right)$;
b) $M_1(1; 0)$, $M_2(-3; 0)$, $M_3\left(0; \sqrt{3}\right)$ $M_4\left(0; -\sqrt{3}\right)$; *c)* $M_1\left(\sqrt{5}; 0\right)$, $M_2\left(-\sqrt{5}; 0\right)$, $M_3(0; 1)$, $M_4(0; -5)$.

3872. $P_1(2; 0)$, $P_1(-1; 0)$, $Q_1\left(0; \frac{5 + \sqrt{33}}{2}\right)$, $Q_2\left(0; \frac{5 - \sqrt{33}}{2}\right)$. Legyen az origó az O pont. Ekkor $OP_1 \cdot OP_2 = -2$, $OQ_1 \cdot OQ_2 = \frac{25 - 33}{4} = -2$. Az origó a kör belső pontja. Az origó a P_1P_2 húrt és a Q_1Q_2 húrt két részre osztja. A részek szorzata egyenlő a 11. évfolyamon igazolt tétel szerint.

3873. A húr végpontjai A és B. $AB = 10$. AB felezőpontja legyen F. Ekkor $AF = 5$, $FK = 5$ és $AK = r$. (K a kör középpontja). AFK derékszögű háromszögben $r^2 = 5^2 + 5^2$, $r = 2\sqrt{5}$, $K\left(5; 2\sqrt{5}\right)$. Két megoldás van, a körök egyenletei $x^2 + y^2 - 10x \pm 10\sqrt{2}y + 25 = 0$.



3874. Két megoldás van: $(x-3)^2+(y\pm5)^2=25$.

3875. $AB=28$, $r=50$, $K(u;\,v)$, $P(0;\,8)$.
$KF\perp AB$, ezért F pont felezi az AB húrt. $KF=v$. Az AFK derékszögű háromszögben $v^2+14^2=50^2$, innen $v=48$. $KP^2=u^2+(48-8)^2$, $50^2=u^2+40^2$, innen $u=\pm30$. Két megoldás van: $x^2+y^2\pm60x-96y+704=0$.

3876. $K(3;\,-3)$, $r=4$, $d=\left|\dfrac{3\cdot3-4\cdot3-2}{5}\right|=1$.

3877. $K_1(4;\,2)$, $r_1=3$, $K_2(-2;\,-6)$, $r_2=6$. A keresett kör középpontja $K(1;\,-2)$, az átmérő: $K_1K_2=10$, $r=5$, egyenlete: $(x-1)^2+(y+2)^2=25$. A tengelypontok: $\left(1\pm\sqrt{21};\,0\right)$ és $\left(0;\,-2\pm2\sqrt{6}\right)$. A négyszög átlói merőlegesek egymásra és a hosszuk $2\sqrt{21}$ és $4\sqrt{6}$. A négyszög területe: $12\sqrt{14}$ területegység.

3878. A kör átmérője $AB=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$ a sugara $r^2=\dfrac{a^2+b^2-2b+1}{4}$, a középpontja $K\left(\dfrac{a}{2};\,\dfrac{b+1}{2}\right)$, az egyenlete: $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{b+1}{2}\right)^2=\dfrac{a^2+b^2-2b+1}{4}$. Rendezve a kör egyenletét: (1) $x^2+y^2-ax-(b+1)y+b=0$. Az x tengelyt olyan pontban metszi a kör, amelynek második koordinátája: $y=0$. Ekkor (1) szerint (2) $x^2-ax+b=0$. Ha (2) diszkriminánsa $a^2-4b>0$, akkor valóban a kör olyan két pontban metszi, amelyek abszcisszái (2) valós gyökei.

3879. A középpontok koordinátái: $K_1(3;\,9)$, $K_2(-5;\,-7)$. A centrális egyenlete: $y=2x+3$, $\alpha=63{,}43°$.

3880. $K(3;\,1)$, $r=5$. A négyszög csúcsai: $x=0$, $A(0;\,5)$, $C(0;\,-3)$, $y=0$, $B\left(3-\sqrt{24};\,0\right)$, $D\left(3+\sqrt{24};\,0\right)$. $T_1=255$, $T_2=16\sqrt{6}$; $\dfrac{T_2}{T_1}=49{,}9\%$.

3881. $K_1(3;\,2)$, $r_1=4$, $K_2(-1;\,4)$, $r_2=4$. $x^2+y^2+2x-8y+1=0$.

3882. A keresett koncentrikus kör egyenlete: (1) $x^2+y^2-4x+2y+k=0$. (1)-nek az x tengellyel való metszéspontjai: $\left(2+\sqrt{4-k};\,0\right)$ és $\left(2-\sqrt{4-k};\,0\right)$. (1) az y tengelyt a $\left(0;\,1+\sqrt{1-k}\right)$ és a $\left(0;\,1-\sqrt{1-k}\right)$ pontokban metszi. A négyszög átlóinak hossza: $2\sqrt{4-k}$ és $2\sqrt{1-k}$ A négyszög területe: $2\sqrt{4-k}\cdot\sqrt{1-k}=6\sqrt{6}$. Innen $k_1=-5$ és $k_2=10$. A feladatnak a $k_1=-5$ felel meg. Megoldás: $(x-2)^2+(y+1)^2=10$.

3883. A kör középpontja az $x-2y=-3$ és az $y=x$, vagy az $x-2y=-3$ és az $y=-x$, egyenletű egyeneseken van. Megoldás: $(x-3)^2+(y-3)^2=20$ és $(x+1)^2+(y-1)^2=80$.

3884. $A=4$, $B=0$ kell legyen. Ekkor $(x-1)^2+\left(y+\dfrac{C}{8}\right)^2=16+\dfrac{C^2}{64}$. Innen $C=\pm24$. Két megoldás van: $(x-1)^2+(y\pm3)^2=25$.

V

V

3885. *a)* Meg kell oldani a következő egyenletrendszert: $\left.\begin{array}{r} 1^2+2^2+a+2b=0 \\ (-3)^2+3^2-3a+3b=0 \end{array}\right\}.$

$a=\frac{7}{3}$; $b=\frac{11}{3}$. *b)* $a=\frac{29}{11}$; $b=-\frac{67}{11}$.

3886. *a)* A kör egyenlete $x^2+y^2+ax+by+c=0$ alakú. Ezért $1+1-a+b+c=0$; $16+4+4a+2b+c=0$; $16+16+4a-4b+c=0$ egyenletrendszer gyökei: $a=-4$, $b=2$, $c=-8$. $(x-2)^2+(y+1)^2=13$. A feladatot úgy is megoldhatjuk, hogy kiszámítjuk az ABC háromszögben az oldalfelező merőlegesek közös pontját, azután a kör sugarát.

b) $(x-2)^2+(y+3)^2=100$; *c)* $(x-5)^2+(y-4)^2=25$; *d)* $(x-3)^2+\left(y-\frac{13}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$;

e) $(x-4)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{65}{4}$.

3887. A körív olyan kör része, amely áthalad az $A(-40;\ 0)$, $B(40;\ 0)$, $C(0;\ 20)$ pontokon. A kör egyenlete: $x^2+(y+30)^2=50^2$. Ha $x=-30$, $y=10$, ha $x=-20$, $y=15{,}8$; és így tovább, akkor a tartórudak hossza rendre; 10; 15,8; 18,9; 20 méter.

3888. *a)* Először számítsuk ki a háromszög csúcspontjainak koordinátáit: $A(3;\ 5)$, $B(-2;\ 1)$, $C(5;\ -2)$. A kör egyenlete: $\left(x-\frac{183}{86}\right)^2+\left(y-\frac{83}{86}\right)^2=\frac{63\,017}{3698}$; *b)* $A(2;\ -3)$ $B(-2;\ -1)$, $C(6;\ 6)$. $(x-2)^2+(y-2)^2=25$; *c)* $A(-1;\ 2)$, $B\left(\frac{13}{3};\ 2\right)$, $C\left(-\frac{55}{7};\ -\frac{50}{7}\right)$;

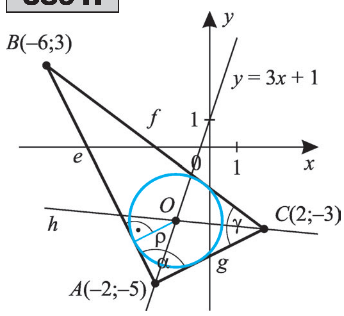
$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\left(y+\frac{50}{7}\right)^2=\frac{40\,000}{441}$.

3889. Az adott egyeneseket jelöljük a következőképpen:
L_1: $x-3y-2=0$; L_2: $7x-y-34=0$; L_3: $x+2y+8=0$. Feltételezve, hogy az egyenesek páronként metszik egymást: (1) $L_1L_2+\lambda L_2L_3+\mu L_3L_1=0$. Ugyanis például az L_1 és L_2 egyenesek metszéspontjának koordinátáira $L_1=0$, $L_3=0$, $L_2L_3=0$ és $L_3L_1=0$. Hasonlóképpen L_2 és L_3, illetve L_3 és L_1 közös pontjai is kielégítik (1) egyenletet. (2) $(x-3y-2)(7x-y-34)+$ $+\lambda(7x-y-34)\cdot(x+2y+8)+\mu(x+2y+8)(x-3y-2)=0$. A (2) másodfokú egyenlet akkor és csakis akkor kör egyenlete, ha az x^2, y^2 együtthatói egyenlők, az xy tag együtthatója 0 és $r^2>0$. Így λ-ra és μ-re felírhatjuk (2) rendezése után a következő egyenletrendszert:
$\left.\begin{array}{r} 9\lambda+7\mu=-4 \\ 13\lambda-\mu=22 \end{array}\right\}$. Innen $\lambda=\frac{3}{2}$; $\mu=-\frac{5}{2}$. Helyettesítsük λ és μ értékét (2)-ben a λ és a μ helyére. Ekkor $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ valóban kör egyenlete. *b)* $7x^2+7y^2-19x+11y-6=0$.
Megjegyzés: Ha a λ és μ paraméterekre kapott egyenletek nem függetlenek egymástól, akkor nincs megoldás. Ekkor az adott egyenesek közül kettő párhuzamos.

3890. A metszéspontok koordinátái: $A(2;\ -3{,}5)$, $B(6;\ -0{,}5)$, $C(2{,}5;\ 0)$. A $2x+14y-5=0$ egyenletű egyenes merőleges a $14x-2y-35=0$ egyenletű egyenesre, mert $2\cdot 14-14\cdot 2=0$!
$r=\frac{AB}{2}=5$ egység.

3891. A csúcsok koordinátái: $A(-2; -5)$, $B(-6; 3)$, $C(2; -3)$. A körülírt kör egyenlete: $(x+2)^2+y^2=25$.
Az $A(-2; -5)$ csúcson átmenő belső szögfelező egyenlete: $\frac{2x+y+9}{\sqrt{5}}=\frac{-x+2y+8}{\sqrt{5}}$, innen (1) $y=3x+1$. A C csúcsnál fekvő γ szög szögfelező egyenesének egyenlete: $\frac{-x+2y+8}{\sqrt{5}}=-\frac{3x+4y+6}{5}$.
Innen (2) $\left(3-\sqrt{5}\right)x+\left(2\sqrt{5}+4\right)y=-6-8\sqrt{5}$. A beírható kör O középpontjának koordinátáit az (1)−(2) egyenletekből álló egyenletrendszer gyökei adják. $x=-\sqrt{5}+1$ és $y=-3\sqrt{5}+4$. A beírható kör sugara a $\frac{2x+y+9}{\sqrt{5}}=0$ normálegyenlet felhasználásával számítható ki. $\varrho=3\sqrt{5}-1$.

3891.



3892. A körök középpontjai: $K_1(0; -6)$, $K_2(11; 10)$. A háromszög egyik oldala 6 egység, a hozzá tartozó magasság 11 egység. $t = 33$ területegység, a kerület hossza 40,28 egység.

3893. Az ABC háromszög derékszögű, mert $\overrightarrow{AC}(-9; 3)$, $\overrightarrow{BC}(2; -6)$ és $2\cdot(-9)+3\cdot(-6)=0$. $t = 33$ területegység, $r=\frac{AB}{2}=\sqrt{\frac{65}{2}}$; $k=\frac{65\pi}{2}$ egység.

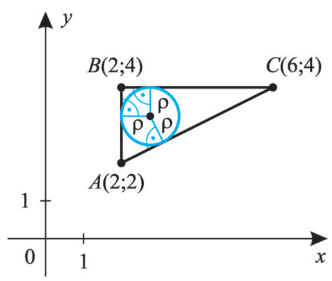
3894. A háromszög derékszögű. $B\sphericalangle = 90°$ (3894. ábra). *a)* 2; 4; $2\sqrt{5}$; *b)* (4; 4); (2; 3); (4; 3); *c)* $S\left(\frac{10}{3}; \frac{10}{3}\right)$ *d)* $K(4; 3)$; *e)* $M(2; 4)$; *f)* A háromszögbe írható kör sugara:
$\varrho=\frac{AB+BC-AC}{2}=3-\sqrt{5}$; $O(2+\varrho; 4-\varrho)$, $O\left(5-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5}\right)$.

3895. A B pont koordinátái $(b; 0)$, a C pont koordinátái $\left(c; \frac{3}{2}c\right)$. Ekkor $\frac{3}{2}c:2=6$ és $\frac{b+c}{2}=11$. Innen $B(14; 0)$, $C(8; 12)$. A kör egyenlete: $(x-7)^2+(y-4)^2=65$.

3896. *I. megoldás.* Írjuk fel az ABC háromszög köré írható kör egyenletét és ellenőrizzük, hogy a D pont illeszkedik-e a körre? *II. megoldás.* $\overrightarrow{AB}(1; -7)$, $\overrightarrow{AD}(7; 1)$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=7-7=0$, tehát $AB\perp AD$. $\overrightarrow{BC}(8; 4)$, $\overrightarrow{CD}(-2; 4)$. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=-16+{}$ $+16=0$, tehát $BC\perp CD$. A négy pont az AD átmérő fölé rajzolt körön van.

3897. *a)* Az $A(1; -4)$, $B(8; 2)$, $C(2; 4)$ pontokon átmenő kör egyenlete: $\left(x-\frac{39}{10}\right)^2+\left(y+\frac{3}{10}\right)^2=\frac{2210}{100}$. Legyen $x=0$. Ekkor $y_1=2{,}32$, $y_2=-2{,}92$. Megoldás: $D(0; -2{,}92)$.
b) $D\left(\frac{43+\sqrt{8249}}{16}; 0\right)$ adódik az $\left(x-\frac{43}{16}\right)^2+y^2=\frac{8249}{256}$ egyenletből.

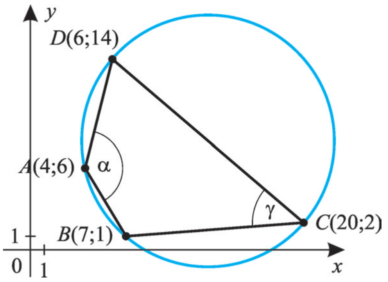
3894.



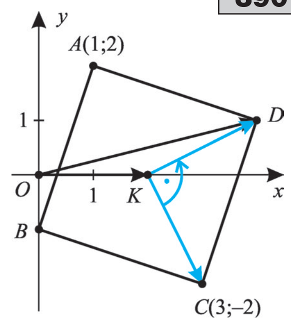
V

V

3898.



3901.



3898. A skaláris szorzat segítségével számítsuk ki az α és a γ szögeket $\overrightarrow{AB}(3;-5)$, $\overrightarrow{AD}(2;8)$. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{34}$, $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{68}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 6 - 40 = -34$. Másrészt $-34 = \sqrt{34}\cdot\sqrt{68}\cos\alpha$. Innen $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha = 135°$. Hasonlóképpen számíthatjuk ki a $\cos\gamma$ értékét. $\cos\gamma = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\gamma = 45°$. Mivel $\alpha + \gamma = 180°$, azért az $ABCD$ négyszög húrnégyszög.

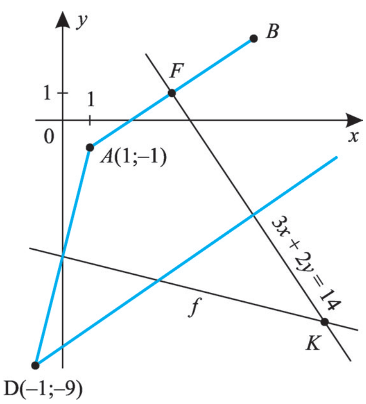
3899. A négyszög ABC pontjain átmenő kör egyenlete: $(x-5)^2 + y^2 = 25$. A $D(1;3)$ pont koordinátái kielégítik a kör egyenletét!

3900. Az ABD pontokon átmenő kör egyenlete: $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 25$. A C pont koordinátái kielégítik a kör egyenletét.

3901. $A(1;2)$, $C(3;-2)$. A négyzet K középpontja az AC szakasz felezőpontja. $K(2;0)$. *(3901. ábra)*. $\overrightarrow{KC}(1;-2)$. Forgassuk el a $\overrightarrow{KC}$ vektort $+90°$-kal. $\overrightarrow{KD}(2;1)$. Ekkor $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KD}$, $D(4;1)$, $B(0;-1)$.

3902. A B csúcs koordinátáit úgy számítjuk ki, hogy az $A(1;-1)$ pontot tükrözzük a $3x + 2y = 14$ egyenletű szimmetriatengelyre. AB egyenes egyenlete: $2x - 3y = 5$. Az AB szakasz F felezőpontjának koordinátáit a $\left.\begin{matrix}3x + 2y = 14\\ 2x - 3y = 5\end{matrix}\right\}$ egyenletrendszer gyökei adják. $F(4;1)$. $B(7;3)$. A szimmetrikus trapéz köré írható kört egyértelműen meghatározzák az A, B, D pontok. A középpontját a $3x + 2y = 14$ egyenletű egyenes és az AD szakasz f felező merőlegesének közös pontja adja. f egyenlete $x + 4y = -20$. $K(9{,}6;-7{,}4)$, $r^2 = AK^2 = 114{,}92$. A trapéz köré írható kör egyenlete: $(x-9{,}6)^2 + (y+7{,}4)^2 = 114{,}92$.

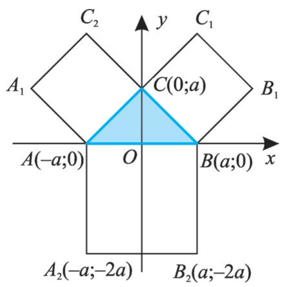
3902.



3903. A téglalap B csúcsának koordinátái: $B(-1;-9)$. Ugyanis $\overrightarrow{AD}(-3;1)$, $3\overrightarrow{AD}(-9;3)$. Elforgatva $+90°$-kal kapjuk az $\overrightarrow{AB}$ vektort. $\overrightarrow{AB}(-3;-9)$. Ekkor $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OB}(-1;-9)$. A B csúcs koordinátái $(-1;-9)$. A téglalap köré írható kör K középpontja azonos a BD szakasz felező-

pontjával. $K(-1;-4)$, a kör sugara: $r = 5$, egyenlete: k: $(x+1)^2 + (y+4)^2 = 25$. A B csúcsot tükrözve az A pontra még egy téglalapot kapunk: $B^*(5;9)$. Az AB^*C^*D téglalap köré írható kör egyenlete:
k_1: $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 25$. A k kör a tengelyeket a $(2;0)$, $(-4;0)$, $\left(0;-4+2\sqrt{6}\right)$, $\left(0;-4-2\sqrt{6}\right)$ koordinátájú pontokban metszi. A k_1 kör a tengelyeket a $(2;0)$, $\left(0;5+\sqrt{21}\right)$, $\left(0;5-\sqrt{21}\right)$, koordinátájú pontokban érinti, illetve metszi. A kimetszett húrok hossza:
6; $4\sqrt{6}$; $2\sqrt{21}$ egység.

3904.



V

3904. A háromszöget helyezzük el az ábrán látható módon a koordináta-rendszerben. Legyen $A(-a;0)$, $B(a;0)$, ekkor $C(0;a)$. Az ABC háromszög így valóban egyenlő szárú és derékszögű háromszög. A $\overrightarrow{CB}(a;-a)$ + 90°-kal elforgatva $\overrightarrow{CC_1}(a;a)$. Így az $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CC_1}$ az $\overrightarrow{OC_1}$ és a C_1 koordinátái $(a;2a)$. Hasonló meggondolással kapjuk, hogy $B_1(2a;a)$, a szimmetria miatt $A_1(-2a;a)$, $C_2(-a;2a)$. A szóbanforgó csúcsok az origótól $\sqrt{4a^2+a^2} = a\sqrt{5}$ egység távolságra vannak, és így az $x^2+y^2=5a^2$ egyenletű körön vannak.

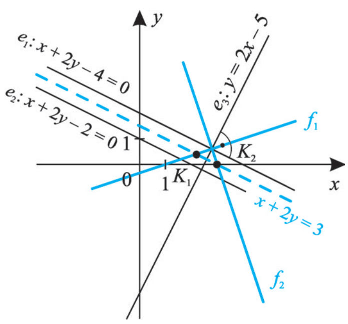
3905. Az egyenesek párhuzamosak. Ebből következik, hogy a kör $(u;v)$ középpontja az $x = 5$ egyenletű egyenesre illeszkedik és a sugara $r = 3$. A középpont rajta van a $3x - y = 6$ egyenletű egyenesen is. Mivel $u = 5$, $v = 9$. Megoldás: $(x-5)^2 + (y-9)^2 = 9$.

3906. $\left[x-\left(4-2\sqrt{2}\right)\right]^2 + \left[y-\left(4-2\sqrt{2}\right)\right]^2 = \left(4-2\sqrt{2}\right)^2.$

3907. Legyen $e_1\!: x+2y-4=0$, $e_2\!: x+2y-2=0$ és $e_3\!: y=2x-5$. $e_1 \parallel e_2$, ezért az érintőkör középpontja rajta van a középpárhuzamoson, amelynek egyenlete $k\!: x+2y=3$. Másrészt rajta van az e_1 és e_3 egyenesek által bezárt szögek szögfelezőin. f_1 és f_2 egyenleteit az e_1 és e_3 egyenesek normálegyenleteivel, illetve a $d = \left|\dfrac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$ távolságképlettel írhatjuk fel.

f_1 egyenlete: $x-3y=1$. Az f_2 egyenlete: $3x+y=9$. A k_1 kör középpontja a $K_1\left(\dfrac{11}{3};\dfrac{2}{5}\right)$ pont, a sugár $r_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. A k_1 kör egyenlete: $\left(x-\dfrac{11}{5}\right)^2 + \left(y-\dfrac{2}{5}\right)^2 = \dfrac{1}{5}$. A k_2 kör K_2 középpontjának koordinátáit a k és f_2 egyenesek metszéspontja adja. $K_2(3;0)$, $r_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. A k_2 egyenlete: $(x-3)^2 + y^2 = \dfrac{1}{5}$.

3907.



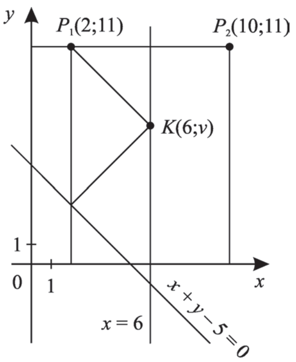
3908. *a)* Legyen $e_1\!: x-3y=0$, $e_2\!: 3x+y-2=0$ és $e_3\!: x+y=3$. A középpont rajta van az e_1 és e_2 egyenesek szögfelezőin, másrészt az e_3 egyenesen. A szögfelezők egyenletei:

$f_1: x + 2y = 1$, $f_2: 2x - y = 1$. A k_1 kör K_1 középpontjának koordinátái kielégítik az f_1 és e_3 egyenleteket. Innen: $K_1(5; -2)$, a sugár $r_1 = \dfrac{11}{\sqrt{10}}$ egység. A k_2 kör K_2 középpontjának koordinátáit az f_2 és e_3 egyenletrendszer gyökei adják. $K_2\left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$, a sugár: $r_2 = \dfrac{11}{3\sqrt{10}}$. A körök egyenletei:

$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 12{,}1$ és $\left(x - \dfrac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \dfrac{5}{3}\right)^2 = \dfrac{121}{90}$.

b) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4{,}5$ és $\left(x + \dfrac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \dfrac{19}{4}\right)^2 = 4{,}5$.

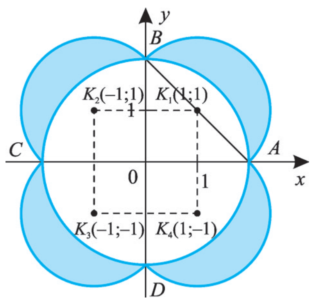
3909.



3909. A k kör K középpontja rajta van az $x = 6$ egyenletű egyenesen, másrészt egyenlő távol van az $x + y - 5 = 0$ egyenletű egyenestől és a $P_1(2; 11)$, illetve $P_2(10; 11)$ koordinátájú pontoktól. ($KP_1 = KP_2$). A $K(6; v)$ pontra felírhatjuk a következő egyenletet:

(1) $\sqrt{(6-2)^2 + (v-11)^2} = \dfrac{6 + v - 5}{\sqrt{2}}$. (1) egyenlet gyökei: $v_1 = 39$, $v_2 = 7$. Mindkét gyök megoldás. Az egyik kör középpontjának koordinátái: (6; 7), a sugara $\sqrt{32}$ egység, a másik kör középpontja: (6; 39), a sugara $\sqrt{800}$ egység.

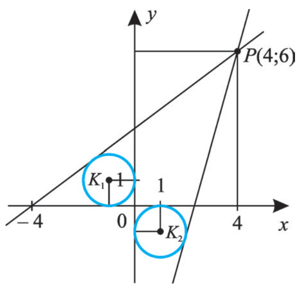
3910.



3910. Legyen $x \geq 0$ és $y \geq 0$. Ekkor a kettős egyenlőtlenség a következőképpen írható: $4 \leq x^2 + y^2 \leq 2x + 2y$. Az $x^2 + y^2 \geq 4$ egyenlőtlenséget kielégítő $(x; y)$ számpárok az origó középpontú 2 egység sugarú körvonal vagy a körön kívül fekvő pontok koordinátái.
Az $x^2 + y^2 \leq 2x + 2y$, illetve az $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$ egyenlettel megadott ponthalmaz az első síknegyedben az (1; 1) középpontú, $r = \sqrt{2}$ sugarú körön vagy annak belsejében helyezkedik el. A kettős egyenlőtlenséggel megadott síkidomot az ábrán az I. síknegyedben bevonalkáztuk. Ha $x \leq 0$ és $y \geq 0$, akkor a II. síknegyedbeli holdacskát kapjuk. És így tovább. A négy bevonalkázott holdacska egybevágó. Egyik területe:

$$t = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 \pi}{2} - \left(\frac{2^2\pi}{4} - \frac{2 \cdot 2}{2}\right) = 2. \quad T = 4 \cdot 2 = 8 \quad \text{területegység.}$$

3911.



3911. A $P(4; 6)$ ponton átmenő egyenesek egyenlete: $y = mx + b$ alakú. $6 = 4m + b$, ezért $y = mx + 6 - 4m$. Az egyenesek normálegyenlete: $\dfrac{mx - y + 6 - 4m}{\sqrt{m^2 + 1}} = 0$. Az ábra alapján állítjuk, hogy két egységsugarú érintőkör létezhet: $K_1(-1; 1)$, $r_1 = 1$, $K_2(1; -1)$, $r_2 = 1$. Ekkor K_1 pontra: (1)

$\left|\frac{-m-1+6-4m}{\sqrt{m^2+1}}\right|=1$. K_2 pontra: (2) $\left|\frac{m+1+6-4m}{\sqrt{m^2+1}}\right|=1$. (1) egyenletből $\left(\frac{5-5m}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2=1$.

$m_1=\frac{4}{3}$, $m_2=\frac{3}{4}$. A feladat követelményeinek az $m=\frac{3}{4}$ felel meg. Az egyenes egyenlete: $3x-4y+12=0$. A (2)-es egyenletből kapjuk a második megoldást: $y=3{,}56x-8{,}24$.

3912. Az $A(0;0)$, $B(1;2)$, $C(4;0)$ csúcsokon átmenő kör egyenlete:

$k\colon (x-2)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{65}{16}$. A kör $K\left(2;\frac{1}{4}\right)$ középpontja a $D(1;-2)$ ponttól $d=\frac{\sqrt{97}}{4}$ egység távolságra van. A keresett kör R sugarát úgy kapjuk, hogy a k kör sugarát, $\frac{\sqrt{65}}{4}$-et a $\frac{\sqrt{97}}{4}-\frac{\sqrt{65}}{4}$ felével megnöveljük. $R=\frac{\sqrt{65}}{4}+\frac{\sqrt{97}}{8}-\frac{\sqrt{65}}{8}=\frac{\sqrt{65}+\sqrt{97}}{8}$.

3913. Helyezzük el az ABC háromszöget a koordináta-rendszerben úgy, hogy a csúcsok koordinátái a következő számpárok legyenek: $A(-a;0)$, $B(a;0)$, $C(c;d)$, ahol $a>0$, $d\neq 0$. Ekkor a $P(x;y)$ pontra $PA^2+PB^2+PC^2=(x+a)^2+y^2+(x-a)^2+y^2+(x-c)^2+(y-d)^2$. Rendezve: $PA^2+PB^2+PC^2=3\left(x-\frac{c}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{d}{3}\right)^2+2a^2+\frac{8c^2}{9}+\frac{8d^2}{9}\geq 2a^2+\frac{8c^2+8d^2}{9}$.

A négyzetösszeg akkor a legkisebb, ha $x=\frac{c}{3}$, $y=\frac{d}{3}$. Ekkor a P pont az ABC háromszög súlypontja.

3914. Válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy a háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A\left(-\frac{c}{2};0\right)$, $B\left(\frac{c}{2};0\right)C(x;y)$ legyen. ($C>0$, $y\neq 0$). Ekkor $t=\frac{c|y|}{2}$ és $8t=4c|y|$ (t jelenti az ABC háromszög területét.) Az oldalak négyzetösszegére felírhatjuk a következő egyenletet: (1) $c^2+\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2+\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2=4c|y|$. Ha $y>0$, akkor (1)-ből $x^2+(y-c)^2=\frac{c^2}{4}$ adódik, ha $y<0$, akkor $x^2+(y+c)^2=\frac{c^2}{4}$. A mértani hely két kör: $K_1(0;c)$, $r_1=\frac{c}{2}$, $K_2(0;-c)$, $r_2=\frac{c}{2}$. Mindkét kör minden pontja hozzátartozik a mértani helyhez.

3915. Legyen $P(x;y)$. Ekkor $(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2+x^2+(y-6)^2=k^2$. Innen rendezéssel: $x^2+(y-2)^2=\frac{1}{3}\left(k^2-32\right)$ adódik. Ha $|k|<4\sqrt{2}$, akkor a mértani hely üres halmaz. Ha $|k|=4\sqrt{2}$, akkor a mértani hely egy pont: $P(0;2)$. Ha $|k|>4\sqrt{2}$, akkor a mértani hely kör, amelynek középpontja a $(0;2)$ koordinátájú pont, a sugara $\sqrt{\frac{k^2-32}{3}}$ egység. A kör minden pontja megfelel.

V

3916. A keresett kör középpontja egyrészt rajta van az origó körül rajzolt egységsugarú körön, másrészt az $x + y = 5$ egyenletű egyenesre a $P(3; 2)$ pontban emelt merőleges egyenesen. A körök egyenletei: $(x-1)^2 + y^2 = 8$ és $x^2 + (y+1)^2 = 18$.

3917. Legyen a szabályos háromszög oldala a hosszúságú. Ekkor a magassága $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy a csúcsok koordinátái a következők legyenek: $B\left(-\frac{a}{2}; 0\right)$, $C\left(\frac{a}{2}; 0\right)$, $A\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. A feladat szerint: $x^2 + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2$. Innen rendezéssel az $x^2 + \left(y + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$ egyenletet kapjuk. A mértani hely olyan kör, amelynek középpontja a $K\left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ pont, a sugara $\frac{a}{\sqrt{2}}$ egység. A kör minden pontja megfelel.

Kör és egyenes kölcsönös helyzete
Kör érintője

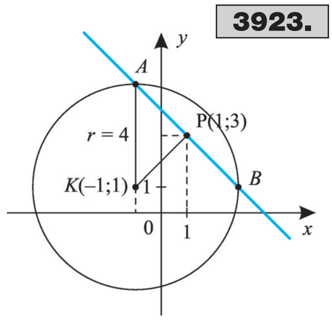
3918. *a)* $P_1(3; 4)$, $P_2(5; 0)$. *b)* $(3; 1)$; *c)* Két közös pont van, ha $r > \frac{|a|}{\sqrt{2}}$; egy közös pont van, ha $r = \frac{|a|}{\sqrt{2}}$; nincs közös pont, ha $r < \frac{|a|}{\sqrt{2}}$. *d)* $P_1\left(\frac{r}{\sqrt{m^2+1}}; \frac{mr}{\sqrt{m^2+1}}\right)$, $P_2\left(-\frac{r}{\sqrt{m^2+1}}; -\frac{mr}{\sqrt{m^2+1}}\right)$. *e)* Két közös pont van, ha $r > \frac{|b|}{\sqrt{m^2+1}}$ egy közös pont van, ha $r = \frac{|b|}{\sqrt{m^2+1}}$, nincs közös pont, ha $r < \frac{|b|}{\sqrt{m^2+1}}$.

3919. *a)* Két közös pont van. *b)* Két közös pont. *c)* Egy közös ponton van. *d)* Nincs közös pont. $D = -868 < 0$.

3920. *a)* $(4; 2)$ és $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ *b)* $(0; 0)$ és $\left(\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)$; *c)* $(1{,}9; 1{,}45)$ és $(0{,}1; 0{,}55)$; *d)* $(3; 1)$ és $(-1; -3)$; *e)* $(5; -6)$

3921. *a)* Két közös pont van: $(5; 4)$ és $\left(\frac{9}{13}; -\frac{32}{13}\right)$. *b)* Egy közös pont van: $(5; -1)$. *c)* Az egyenes egyenlete: $4x + 3y = 25$. Az egyenesnek és az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű körnek egy közös pontja van: $(4; 3)$. Az egyenes az $x^2 + y^2 = 36$ egyenletű kört két pontban metszi. $\left(\frac{20 + 3\sqrt{11}}{5}; \frac{15 - 4\sqrt{11}}{5}\right)$ és $\left(\frac{20 - 3\sqrt{11}}{5}; \frac{15 + 4\sqrt{11}}{5}\right)$.

3923.



3922. A húr hossza: $\dfrac{54\sqrt{13}}{13}$ egység.

3923. A $P(1;\,3)$ ponton átmenő legrövidebb húr merőleges a KP szakaszra, ahol K az adott kör középpontja, feltéve, hogy P a kör belsejében van. $K(-1;\,1)$, a sugár $r = 4$. $KP = \sqrt{8} < 4$, tehát P a körön belül van. Az ábra szerint $AP^2 = KA^2 - KP^2$, a legrövidebb húr hossza: $AB = 4\sqrt{2}$. A húr egyenesének egyenlete: $x + y = 4$.

3924. A kör középpontja az AB szakasz felezőmerőlegesére illeszkedik. Ennek egyenlete $7x + y = 33$. A középpontja: $K(4;\,5)$. A sugár $r = AK = 5$ egység. A kör egyenlete: $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$. A C csúcs koordinátáit a kör és az $y - 2x = 7$ egyenletű egyenes közös pontjai adják. $C_1(1;\,9)$, $C_2(-1;\,5)$.

V

3925. $x^2 + y^2 + x - 7y = 0$.

3926. Számítsuk ki a $K(3;\,7)$ középpontú, $r = 5$ egység sugarú kör és az $x + 2y = 7$ egyenletű egyenes közös pontjainak koordinátáit. $P_1(-1;\,4)$, $P_2(3;\,2)$.

3927. Legyen $A(2;\,5)$, $B(-4;\,-3)$. Ekkor az átfogó egyenes egyenlete $4x - 3y = -7$. Mivel a $T(t;\,2{,}12)$ illeszkedik az átfogóra, azért $4t - 3\cdot 2{,}12 = -7$, innen $t = -0{,}16$. Az ABC derékszögű háromszög köré írható Thalész-kör egyenlete: $K(-1;\,1)$, $r = 5$, $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 25$. A T ponton átmenő magasságegyenes egyenlete: $3x + 4y = 8$. $C_1(-4;\,5)$, $C_2\left(\dfrac{92}{25};\ -\dfrac{19}{25}\right)$.

3928. A kör középpontja az origó, $O(0;\,0)$, az érintési pont az $E(6;\,-8)$ pont. A keresett kör középpontja rajta van az OE egyenesen, és az E ponttól 15 egység távolságra van. OE egyenes egyenlete: $4x + 3y = 0$. $EK = 15$ vagyis $(x-6)^2 + (y+8)^2 = 225$. $K_1(-3;\,4)$, $K_2(15;\,-20)$, és a sugár $r = 15$. Két megoldás van: $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 225$ és $(x-15)^2 + (y+20)^2 = 225$.

3929. Az ábra szerint $CD = 4\sqrt{5}$. Mivel $KE \perp CD$, ezért $ED = 2\sqrt{5}$. A CD egyenes normálegyenlete: $\dfrac{x - 2y + 18}{\sqrt{5}} = 0$. A k kör $K(u;\,v)$ középpontjának a CD egyenestől mért távolsága:

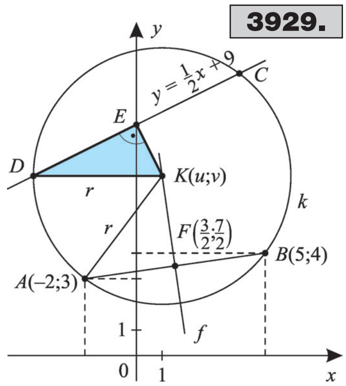
$$d = \left|\frac{u - 2v + 18}{\sqrt{5}}\right|.$$

A k kör középpontja rajta van az AB szakasz felezőmerőlegesén, az f egyenesen. f egyenlete: $7x + y = 14$, tehát $7u + v = 14$. A keresett kör $r = AK$ sugarára felírhatjuk a következő egyenletet: $(u+2)^2 + (v-3)^2 = r^2$. Másrészt $r^2 = KE^2 + ED^2$, tehát (1)

$$(u+2)^2 + (v-3)^2 = \left|\frac{u - 2v + 18}{\sqrt{5}}\right|^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2.$$

A k_1 kör egyenlete: $(x-1)^2 + (y-7)^2 = 25$, a k_2 kör egyenlete $(x-17)^2 + (y+105)^2 = 12\,025$.

3929.



3930. Az origón átmenő kör egyenlete: $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ alakú. A szögfelező origótól különböző pontja $P(p;\,p)$, ahol $p \neq 0$. Mivel P rajta van a körön, azért $p^2 + p^2 + ap + bp = 0$.

$p \neq 0$-val egyszerűsítve: $2p + a + b = 0$, tehát $a + b = -2p$. A körnek a tengelyekkel való metszéspontjai: $O(0; 0)$ és $A(-a; 0)$, illetve $O(0; 0)$ és $B(-b; 0)$. $OA + OB = -(a + b) = 2p$. Tehát a kérdéses összeg csak a P pont megválasztásától függ.

3931. $4x + 3y = 25$.

3932. Az adott kör -5 abszcisszájú pontjai: $P_1\left(-5; \sqrt{11}\right)$, $P_2\left(-5; -\sqrt{11}\right)$. A P_1P_2 pontokban az érintők egyenletei: e_1: $-5x + \sqrt{11}\,y = 36$ és e_2: $-5x - \sqrt{11}\,y = 36$. Írjuk fel a normálvektorok skaláris szorzatát. $6 \cdot 6\cos\varphi = 25 - 11$, $\cos\varphi = \frac{14}{36}$. $\varphi = 67{,}1°$. Mivel a φ nem tompaszög, azért a két érintő hajlásszöge $67{,}1°$.

V

3933. Az érintők metszéspontja $P\left(\frac{50}{7}; -\frac{50}{7}\right)$. $\varphi = 16{,}26°$.

3934. Az érintők egyenletei: $y = 1$, $x = -1$, $y = -1$ és $xx_1 + yy_1 = 1$, ahol $0 < x_1 < 1$. A trapéz csúcsai: $A(-1; -1)$, $B\left(\frac{1 + y_1}{x_1}; -1\right)$, $C\left(\frac{1 - y_1}{x_1}; +1\right)$, $D(-1; 1)$. A B csúcs koordinátáit az $\left.\begin{aligned} xx_1 + yy_1 &= 1 \\ y &= -1 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer, a C csúcs koordinátáit az $\left.\begin{aligned} xx_1 + yy_1 &= 1 \\ y &= 1 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer gyökei adják. A trapéz AC átlójának egyenlete: (1) $-2x + \frac{x_1 - y_1 - 1}{x_1}\,y = \frac{x_1 + y_1 - 1}{x_1}$. A trapéz BD átlójának egyenlete: (2) $2x + \frac{x_1 + y_1 + 1}{x_1}\,y = \frac{-x_1 + y_1 + 1}{x_1}$. (1) és (2) egyenlet megfelelő oldalait összeadva $y = \frac{y_1}{x_1 + 1}$ adódik. y értékét behelyettesítve (1)-ben az x helyére és figyelembe véve, hogy $x_1^2 + y_1^2 = 1$, $x = 0$ adódik. $M\left(0; \frac{y_1}{x_1 + 1}\right)$. A nem párhuzamos oldalak érintési pontjai: $P_1(-1; 0)$, $P_2(x_1; y_1)$. A P_1P_2 egyenes egyenlete: $-y_1 x + \left(x_1 + 1\right) y_1 = y_1$. Ha $x = 0$, akkor $y = \frac{y_1}{x_1 + 1}$, tehát a P_1P_2 egyenes átmegy az M ponton.

3935. *a)* $P(10; 0)$ ponton átmenő egyenesek egyenlete $y = mx - 10m$. Az m paramétert úgy kell megválasztani, hogy a körnek és az egyenesnek egy közös pontja legyen. Ez akkor teljesül, ha az $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ y &= mx - 10m \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszerből adódó $x^2 + (mx - 10m)^2 = 25$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0. $\left(1 + m^2\right)x^2 - 20m^2x^2 + 100m^2 - 25 = 0 = 25$ egyenletből a diszkrimináns D: $3m^2 = 1$. Tehát $m = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Két megoldás van. Az érintők egyenletei: $x \pm \sqrt{3}\,y = 10$. Az érintési pontok koordinátái: $P_1\left(\frac{5}{2}; \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_2\left(\frac{5}{2}; \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$. Az érintőszakasz hossza: $5\sqrt{3}$ egység. Az érintők hajlásszögét a normálvektorok segítségével számítjuk ki. $\mathbf{n}_1\left(1; \sqrt{3}\right)$, $\mathbf{n}_2\left(1; -\sqrt{3}\right)$, $|\mathbf{n}_1| = |\mathbf{n}_2| = 2$. $4\cos\varphi = 1 - 3$, $\varphi = 120°$. Az egyenes hajlásszöge hegyesszög: $\omega = 180° - 120°$. *b)* $4x - 3y = 25$, $3x - 4y = 25$, $P_1(4; -3)$, $P_2(3; 4)$, 5 egység, 90°.

c) $y = 4$, $4x - 3y = 20$, $P_1(0;\, 4)$, $P_2(3{,}2;\, -2{,}4)$, 8 egység, 53,13°. *d)* $x + 2y = 5$, $2x - y = -5$, $P_1(1;\, 2)$, $P_2(-2;\, 1)$, $\sqrt{5}$ egység, 90°.

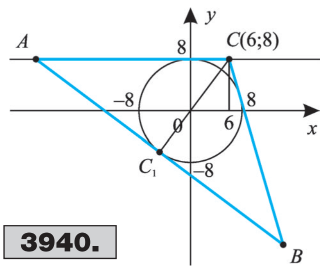
3936. Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelynek befogói a kör sugara és a (8; 0) pontból a körhöz húzott érintőszakasz. Az átfogó hossza 8 egység. Ekkor $\sin\alpha = \frac{4}{8}$, $\alpha = 30°$, $2\alpha = 60°$.

3937. Az $A(-12;\, 3{,}5)$ pontból az $x^2 + y^2 = 100$ egyenletű körhöz húzott érintők egyenletei $117x + 44y = -1250$ és $3x - 4y = -50$. A (12; 10) ponton átmenő és az $x^2 + y^2 = 100$ egyenletű kört érintő egyenesek egyenlete $y = 0$, $60x - 11y = 610$. A hiányzó csúcsok koordinátái: $\left(-\frac{10}{3};\, 10\right)$, $\left(\frac{10}{3};\, -\frac{410}{11}\right)$.

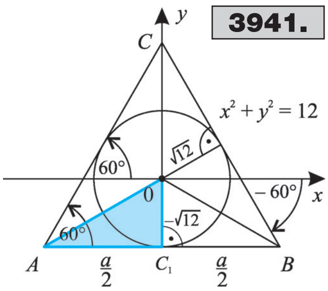
3938. *a)* A $K(0;\, 0)$ ponton át húzzunk merőleges egyenest a $4x - 2y = 7$ egyenletű egyenesre. Ennek egyenlete: $x + 2y = 0$. Ez az egyenes kimetszi a körből a keresett érintők pontjait. $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 25 \\ x + 2y = 0 \end{matrix}\right\}$. Innen $5y^2 = 25$, $y = \pm\sqrt{5}$; $x = \mp 2\sqrt{5}$. Az érintési pontok koordinátái: $E_1\left(-2\sqrt{5};\, \sqrt{5}\right)$, $E_2\left(2\sqrt{5};\, -\sqrt{5}\right)$. Az érintők egyenletei: $2x - y = -5\sqrt{5}$ és $2x - y = 5\sqrt{5}$.
b) $2x - y = 5$; $2x - y = -5$. *c)* $5x - 12y = 169$, $5x - 12y = -169$. *d)* Az $y = 3x - 7$ egyenletű egyenesre merőleges egyenes egyenlete: $x + 3y = b$ alakú. A b értékét úgy kell megválasztani, hogy az egyenesnek a körrel pontosan egy közös pontja legyen. A diszkrimináns: $D = 36b^2 - 40\left(b^2 - 25\right) = 0$, ha $b = \pm 5\sqrt{10}$.
Az érintők egyenletei: $x + 3y = 5\sqrt{10}$ és $x + 3y = -5\sqrt{10}$.

3939. A P pont abszcisszáját a PQO derékszögű háromszög segítségével számíthatjuk ki, ahol O a kör középpontja (az origó). $OQ = 12$, $QP = 35$, $OP^2 = 12^2 + 35^2$, $OP = 37$. Az érintési pont koordinátáit az $x^2 + y^2 = 144$ egyenletű kör és az OP átmérő fölé rajzolt Thalész-kör közös pontjai adják. $E_1\left(\frac{144}{37};\, \frac{420}{37}\right)$, $E_2\left(\frac{144}{37};\, -\frac{420}{37}\right)$.
Az érintők egyenletei: $12x + 35y = 444$ és $12x + 35y = -444$.

3940. Az alappal szemközti $C(6;\, 8)$ csúcson és a beírt kör $O(0;\, 0)$ középpontján átmenő egyenes a beírt kört az alap C_1 felezőpontjában metszi és merőleges az alap egyenesére. Az OC egyenes egyenlete: $y = \frac{8}{6}x$. A C_1 pont koordinátáit az $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 64 \\ y = \frac{8}{6}x \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszer gyökei adják: (4,8; 6,4) és (−4,8; −6,4). Mivel a kör a háromszögbe írt kör, azért a C_1 koordinátái az ábra szerint (−4,8; −6,4). Az AB alapegyenes egyenlete: $3x + 4y = -40$. A C pontból a körhöz húzott egyik száregyenes egyenlete: $y = 8$. A csúcs koordinátái: $3x + 32 = -40$ egyenletből $x = -\frac{72}{3} = -24$. A B csúcs koordinátáit megkapjuk, ha az A pontot tükrözzük a C_1 pontra. $B(14{,}4;\, -20{,}8)$.



3940.



3941. Az AOC_1 háromszögben $\mathrm{tg}\,30° = \frac{|OC_1|}{\left|\frac{a}{2}\right|}$. Innen $|a| = 12$, a szabályos háromszög oldala 12 egység hosszú. Az A csúcs koordinátái $A\left(-6;\ -2\sqrt{3}\right)$, $B\left(6;\ -2\sqrt{3}\right)$, $C\left(0;\ 4\sqrt{3}\right)$. Az oldalak egyenletei: $y = \sqrt{3}\,x + 4\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}\,x + 4\sqrt{3}$, $y = -2\sqrt{3}$.

3942. Az adott k kör középpontján át húzzunk merőleges egyenest az adott e egyenesre. Válasszuk ezt az egyenest x tengelynek, az e egyenest y tengelynek. A K kör középpontjának rögzített koordinátái $(u, 0)$, az y tengely változó P pontjának koordinátái $P(0; p)$. A P középpontú kör egyenlete: $x^2 + (y-p)^2 = u^2 + p^2 - r^2$. Innen leolvasható, hogy p-től függetlenül a $Q\left(\sqrt{u^2 - r^2}\,;\ 0\right)$ rajta van mindegyik körön. 2 megoldás van, ha $u^2 > r^2$, 1 megoldás, ha $u^2 = r^2$, nincs megoldás, ha $u^2 < r^2$.

3943. *a)* $4x + 3y = 35$. (K a kör középpontja, P a kör adott pontja). *b)* $2x - 3y + 9 = 0$; *c)* $3x - 4y + 39 = 0$ és $3x + 4y - 1 = 0$.

3944. Az érintési pontok koordinátái: $E_1(3; 1)$, $E_2(-1; -3)$. Az e_1 érintő normálvektora: $\mathbf{n}_1(5; -1)$, e_2 normálvektora: $\mathbf{n}_2(-1; 5)$. Az érintők egyenletei: e_1: $5x - y = 14$, e_2: $x - 5y = 14$. e_1 és e_2 Q metszéspontjának koordinátái: $Q\left(\frac{7}{3}; -\frac{7}{3}\right)$.

3945. A kör a tengelyeket a $(0; 0)$, $(0; 8)$, $(6; 0)$ pontokban metszi. Ezekben a pontokban a kör érintőinek egyenletei rendre $x + y = -1$, $x - y = -8$, $x + 2y = 6$. A hajlásszögek az érintők és a tengelyek által beárt szöggel egyenlők: 45°, 45° és 26,56°.

3946. A pálya egyenletét a $P(2; 1)$ pontban a körhöz húzható érintő egyenlete adja: $3x - 4y - 2 = 0$.

3947. A kör középpontjának koordinátái: $K(3; -5)$. A $4x - 3y = 0$ egyenessel párhuzamos körérintők érintési pontjait úgy kapjuk meg, ha a K középponton átmenő, és a $4x = 3y$ egyenesre merőleges egyenesnek és a körnek a közös pontjait határozzuk meg. Az érintési pontok koordinátái: $E_1(11; -11)$, $E_2(-5; 1)$. Az érintők egyenletei: e_1: $4x - 3y - 77 = 0$, e_2: $4x - 3y + 23 = 0$.

3948. Az érintő egyenlete: $y = 3x + b$ alakú. A b-t úgy kell meghatározni, hogy az egyenesnek és a körnek egy közös pontja legyen. Ekkor a kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa: $D = (6b - 46)^2 - 40\left(b^2 - 12b + 45\right)$. $D = 0$, ha $b = -9 \pm \sqrt{2}$. Két érintő létezik. Egyenletük: $y = 3x - 9 \pm \sqrt{2}$.

3949. Két érintőt kapunk: $2x + y - 7 = 0$, $2x + y = 3$.

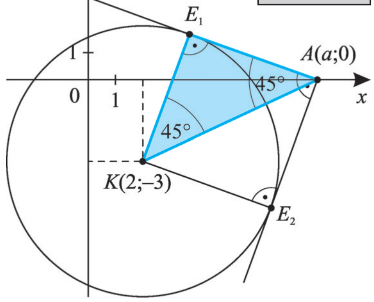
3950. *a)* Az érintő egyenlete: $y = mx$ alakú. m-et úgy kell meghatározni, hogy az $y = mx$ egyenletű egyenesnek az $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$ egyenletű körrel egy közös pontja legyen. Az egyenletrendszer diszkriminánsa: $D = 80m - 84m^2$. $D = 0$, ha $m_1 = 0$, $m_2 = \frac{20}{21}$. Két érintőt kapunk. Egyenleteik: $y = 0$ és $20x - 21y = 0$. *b)* $x - 2y + 1 = 0$, $2x - y - 7 = 0$; *c)* $x = 3$, $5x - 12y - 3 = 0$; *d)* $9x + 40y = 258$, $x = 2$.

3951. A kör egyenlete: $(x-5)^2+(y+1)^2=16$. A $P_1(0;\,-1)$ pont a kör $K(5;\,-1)$ középpontjától 5 egység távolságra van. A P_1 pontból a körhöz húzható érintőszakasz olyan derékszögű háromszögnek a befogója, amelynek átfogója 5 egység, a másik befogó 4 egység. Az érintőszakasz hossza 3. P_2 rajta van a körön, P_3 belső pont. P_4-re $\sqrt{10}$.

3952. Két megoldás van. $P_1(-0{,}4;\,8{,}8)$, $P_2(6;\,4)$. Ugyanis a $(-2;\,0)$ ponton átmenő körérintők egyenlete: $-x+2y=2$, $-11x+2y=22$.

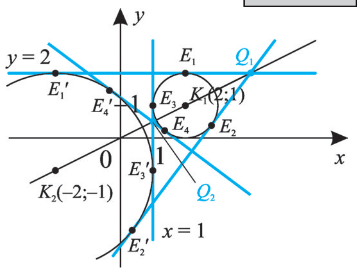
3953. Tekintsük az ábrát. A KA felezi az A-nál fekvő derékszöget. A KAE_1 derékszögű háromszög átfogója $\sqrt{50}$ egység. Így $(a-2)^2+25=50$. Innen $a=2\pm\sqrt{41}$. Két megoldás van. $A_1\left(2+\sqrt{41};\,0\right)$, $A_2\left(2-\sqrt{41};\,0\right)$.

3953.



3954. *a)* A közös külső és belső érintők átmennek a körök külső, illetve belső hasonlósági pontjain, a Q_1 és a Q_2 ponton. A két kör olyan helyzetű, hogy az egyik külső érintő egyenlete: $y=2$. A Q_1 pont koordinátáit úgy számítjuk ki, hogy először felírjuk K_1K_2 centrális egyenletét $\left(y=\frac{1}{2}x\right)$, azután a Q_1 pont koordinátái egyszerűen adódnak. $Q_1(4;\,2)$, $Q_2\left(1;\,\frac{1}{2}\right)$. Ezután kiszámítjuk a Q_1 és a Q_2 ponton átmenő, például az $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ egyenletű kör $y=2$ egyenestől különböző érintőjének egyenletét: $4x-3y=10$. A Q_2 ponton átmenő másik érintő egyenlete: $3x+4y=5$. *b)* A két kör metszi egymást. Csak külső érintőik vannak. Egyenleteik: $3x+4y=75$ és $3x-4y=75$. *c)* Csak közös külső érintők léteznek. Egyenleteik: $x+y=3\left(1\pm\sqrt{2}\right)$.

3954.



3955. A közös érintő egyenlete: $x+2y=12$.

3956. A harmadik csúcs rajta van a körön és az AB oldal felezőmerőlegesén. Két megoldás van: $C_1(6;\,8)$, $C_2(-1{,}5;\,-0{,}5)$.

3957. Az $A(1;\,1)$ csúccsal szemközti oldal A_1 felezőpontjának koordinátái $A_1(4;\,7)$. A szabályos háromszög magassága: $AA_1=3\sqrt{5}$ egység. A szabályos háromszög oldala legyen a hosszúságú. $a=6\sqrt{\frac{5}{3}}$. A BC oldal egyenlete: $x+2y=18$. A szabályos háromszög $B(b_1;\,b_2)$ csúcsa rajta van a BC oldal egyenesén, másrészt az A csúcstól $6\sqrt{\frac{5}{3}}$ egység távolságra van. A keresett csúcsok koordinátái: $B\left(4-2\sqrt{3};\,7+\sqrt{3}\right)$, $C\left(4+2\sqrt{3};\,7-\sqrt{3}\right)$.

3958. A négyszög csúcsai: A, B, C, D. Az A csúcs koordinátáit a $2x+y=0$, $2x-y+4=0$ egyenesek közös pontja adja. $A(-1;\,2)$. Az AP átló egyenlete: $y=2$. BD átló egyenlete: $x=1$.

A B csúcs koordinátáit az $\left.\begin{array}{r} x=1 \\ 2x-y+4=0 \end{array}\right\}$ egyenletrendszer, a D csúcs koordinátáit az $\left.\begin{array}{r} x=1 \\ 2x+y=0 \end{array}\right\}$ egyenletrendszer megoldása adja. $B(1;\,6)$, $D(1;\,-2)$. Írjuk fel az A, B, D pontokon átmenő kör egyenletét: $(x-4)^2+(y-2)^2=25$. A C csúcs koordinátáit a kör és az AP átló egyenleteiből álló egyenletrendszer gyökei adják. $C(2;\,9)$.

3959. Két megoldás van, mert két érintő húzható. $P_1\left(\frac{3}{5};\,\frac{11}{5}\right)$, $P_2\left(-\frac{7}{5};\,-\frac{9}{5}\right)$.

V

3960. A $K(5;\,-10)$ középpontú $r=\sqrt{50}$ egység sugarú kör 10 egység hosszúságú húrjai a középponttól $d=5$ egység távolságra vannak. A húrok felezőpontjai egy $(x-5)^2+(y+10)^2=25$ egyenletű körön vannak. Az origón átmenő $y=mx$ egyenletű egyenesek közül azt az egyenest kell kiválasztani, amely érinti az $(x-5)^2+(y+10)^2=25$ egyenletű kört. Az egyik érintő egyenlete $x=0$ (az y tengely). A másik érintő egyenletét az $\left.\begin{array}{r} y=mx \\ (x-5)^2+(y+10)^2=25 \end{array}\right\}$ egyenletrendszerből adódó diszkriminánsból számíthatjuk ki. $-4m-3=0$, $m=-\frac{3}{4}$. Az $x=0$ egyenletű egyenes az $(x-5)^2+(y+10)^2=50$ egyenletű kört a $P_1(0;\,-5)$ és a $P_2(0;\,-15)$ pontokban, az $y=-\frac{3}{4}x$ egyenletű egyenes a kört a $Q_1(4;\,-3)$ és a $Q_2(12;\,-9)$ pontokban metszi. $P_1P_2=Q_1Q_2=10$ egység.

3961. A kör középpontja rajta van az $y=x$ egyenletű egyenesen, tehát a középpont koordinátái: $u=v$, a sugár $r^2=2u^2$, mert a kör érinti az origóban az $y=-x$ egyenletű egyenest. A középpont r távolságra van az $\frac{x-y+4}{\sqrt{2}}=0$ normálegyenletű egyenestől is. Tehát $\sqrt{2u^2}=\frac{4}{\sqrt{2}}$. Két megoldás van: $(x-2)^2+(y-2)^2=8$, vagy $(x+2)^2+(y+2)^2=8$.

3962. k_1: $\left[x-\left(4\sqrt{2}-4\right)\right]^2+\left[y-\left(4-4\sqrt{2}\right)\right]^2=32\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ és k_2: $\left[x-\left(-4-4\sqrt{2}\right)\right]^2+\left[y-\left(4+4\sqrt{2}\right)\right]^2=32\left(3+2\sqrt{2}\right)^2$.

3963. Meg kell keresni az adott körnek azt a pontját, amelyik legközelebb van az AB egyeneshez. Ezt a pontot a $K(8;\,2)$ ponton átmenő, és az AB egyenesre merőleges e egyenes metszi ki a körből. Megoldás $(4;\,-1)$.

3964. A $P(6;\,3)$ ponton átmenő e egyenes egyenlete: $y=mx+3-6m$ alakú. e normálegyenlete: $\frac{mx-y+3-6m}{\sqrt{m^2+1}}=0$. m-et úgy kell meghatározni, hogy $\left|\frac{-2m+1+3-6m}{\sqrt{m^2+1}}\right|=4$ legyen. Megoldás: $y=3$ és $4x-3y=15$.

3965. $(x-5)^2+(y-7)^2=20$. A ponthalmaz kör, a kör minden pontja hozzátartozik a feltételt kielégítő ponthalmazhoz.

3966. Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsának koordinátái $(0;\,0)$, a C csúcs koordinátái $(p;\,q)$. Az AC átló felezőpontja: $F\left(\frac{p}{2};\,\frac{q}{2}\right)$. F illeszkedik az $x+2y=14$ egyenletű egyenesre, tehát

(1) $\frac{p}{2} + 2 \cdot \frac{q}{2} = 14$. Másrészt C rajta van a körön, ezért (2) $(p-8)^2 + (q-5)^2 = 25$. (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszer gyökei adják a C csúcspont koordinátáit. Két megoldás van. $C_1(8; 10)$ és $C_2(12; 8)$. Az AC_1 átló felezőpontja: $F_1(4; 5)$. A paralelogramma B_1 és D_1 csúcsait úgy számíthatjuk ki, hogy felírjuk a KF_1 egyenesre merőleges, és az F_1 ponton átmenő szelő egyenletét. (Ugyanis F_1 felezi a B_1D_1 húrt, ezért a $K(8; 5)$ középpontból a húr felezőpontjához húzott szakasz merőleges a húrra.) A szelő kimetszi a körből a B_1 és a D_1 csúcsokat. A szelő egyenlete: $x = 4$, B_1 és D_1 koordinátái: $B_1(4; 2)$, $D_1(4; 8)$. Hasonló meggondolással kapjuk a $C_2(12; 8)$ pont felhasználásával a B_2, D_2 csúcsok koordinátáit. $B_2(8; 0)$, $D_2(4; 8)$. Az $AB_1C_1D_1$ és az $AB_2C_2D_2$ négyszögek valóban paralelogrammák és eleget tesznek a feladat követelményeinek.

3967. Két megoldás van. $P_1(15; 3)$, $P_2(8; 10)$.

3968. A kör középpontjának koordinátái: $K(u; 2u)$, az érintési pont koordinátái $E(5; 5)$. Az adott egyenes irányvektora: $\mathbf{v}(-3; 4)$, a $\overrightarrow{KE}(5-u; 5-2u)$. $\overrightarrow{KE} \perp \mathbf{v}$. $\overrightarrow{KE} \cdot \mathbf{v} = 0$. Innen $u = 1$. A kör egyenlete: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$.

3969. 4 olyan kör van, amely megfelel a feladat követelményeinek. Ezek közül legkisebb az $A(0; 0)$, $B\left(\sqrt{3}; 0\right)$, $C(0; 1)$ csúcsokkal kifeszített háromszögbe írt kör. Ennek a K középpontja rajta van az $y = x$ egyenletű egyenesen, tehát $K(u; u)$, $r = u$. Az adott egyenes normálegyenlete: $\frac{x + \sqrt{3}\,y - \sqrt{3}}{2} = 0$. A beírt körre felírhatjuk a következő egyenletet: $\frac{u + \sqrt{3}\,u - \sqrt{3}}{2} = -u$.

A kör egyenlete: $\left(x - \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$.

3970. Az oldalak egyenletei: $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$, $x = \frac{9}{2}$. A kerület $9\sqrt{3}$ egység, a terület $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ területegység.

3971. Legyenek a téglalap csúcsainak koordinátái: $A(0; 0)$, $B(a; 0)$, $C(a; 2a)$, $D(0; 2a)$. Az E koordinátái: $\left(a; \frac{a}{2}\right)$. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

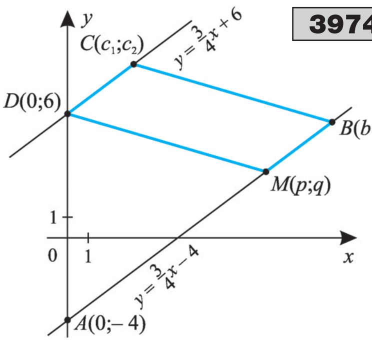
3972. Az origón átmenő érintő egyenlete $y = mx$. Az egyenes akkor érinti a kört, ha az
$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 8x + 12y - 12 + a &= 0 \\ y &= mx \end{aligned}\right\}$$
egyenletrendszerből adódó diszkrimináns 0.

D: $(48-a)m^2 - 48m + 28 - a = 0$. Két m érték, két érintő van. Ha ezek merőlegesek egymásra, akkor az iránytangenseik szorzata -1.

$m_1 \cdot m_2 = \frac{28-a}{48-a} = -1$, a gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján, $a = 38$.

3973. Az $A(5; -1)$ csúccsal szemközti BC oldal A_1 felezőpontja azonos az adott kör $K(1; 2)$ középpontjával. Ebből következik, hogy a BC oldal a kör átmérője. Végtelen sok megoldás van.

3974.



3974. Tekintsük az ábrát. Az érintőnégyszög egyenlő szárú trapéz, mert két szemközti oldala párhuzamos és a trapéz tengelyesen szimmetrikus. Az alapok összege 20, mert a szárak összege $2 \cdot AD = 20$ egység. A má-

V

sik szár irányvektorát úgy számíthatjuk ki, ha először kiszámítjuk az M pont koordinátáit úgy, hogy $MD = AD = 10$ egység legyen. Az $M(p;\ q)$ pontra $\left.\begin{array}{ll}(1) & q = \dfrac{3}{4}p - 4\\ (2) & \sqrt{p^2 + (q-6)^2} = 10\end{array}\right\}$.

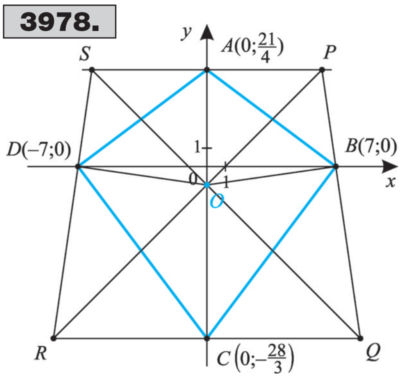
(1)−(2) egyenletrendszerből: $p = \dfrac{48}{5}$, $q = \dfrac{16}{5}$. A trapéz BC szára párhuzamos az MD szakasszal. MD egyenes irányvektora $\mathbf{v}\left(\dfrac{48}{5};\ \dfrac{14}{5}\right)$, illetve $\mathbf{v}_{MD}(24;\ -7)$. Legyen a $B(b_1;\ b_2)$, a $C(c_1;\ c_2)$. Ekkor B és C koordinátáira felírhatjuk a következő egyenletrendszert: (3) $b_2 = \dfrac{3}{4}b_1 - 4$; (4) $c_2 = \dfrac{3}{4}c_1 - 6$; (5) $\sqrt{b_1^2 + (b_2+4)^2} + \sqrt{c_1^2 + (c_2+6)^2} = 20$, mert az érintőnégyszög szemközti oldalainak összege egyenlő és (6) $\dfrac{b_2 - c_2}{b_1 - c_1} = -\dfrac{7}{24}$, mert BC egyenes iránytangense egyenlő az MD egyenes iránytangensével. (3)−(6) egyenletrendszer megoldása, mivel $b_1, b_2, c_1, c_2 > 0$, $b_1 = \dfrac{64}{5}$; $b_2 = \dfrac{28}{5}$; $c_1 = \dfrac{16}{5}$; $c_2 = \dfrac{42}{5}$.

3975. A rajta van a körön, mert a koordinátái kielégítik az adott kör egyenletét. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 169$ egyenletből $K(3;\ 2)$. A C csúcsot úgy kapjuk, hogy az A pontot tükrözzük a K középpontra. $C(-2;\ 14)$. $\overrightarrow{KA}(5;\ -12)$. Elforgatva $\pm 90°$-kal, $B(15;\ 7)$, $D(-9;\ -3)$.

3976. A és B valóban a k: $(x-1)^2 + y^2 = 26$ kör pontjai. Igazoljuk! A C pont koordinátái $(c_1;\ c_2)$. Ekkor (1) $\dfrac{(c_1+4)^2 + (c_2+1)^2}{(c_1-6)^2 + (c_2-1)^2} = \dfrac{9}{4}$ és (2) $(c_1-1)^2 + c_2^2 = 26$. Két megoldás van. $C_1(2;\ 5)$, $C_2\left(\dfrac{50}{13};\ -\dfrac{55}{13}\right)$.

3977. Az egyenes egyenlete: $y = -2x + 2a$, ahol $a > 0$. Az egyenes érinti az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű kört, ha $a = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Az érintési pont: $E\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5};\ \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

3978.



3978. Ábrázoljuk a deltoidot. A beírt kör O középpontja az y tengelyre esik, mert az y tengely szimmetriatengely. Másrészt O rajta van az ABC szög szögfelezőjén.

AB egyenes normálegyenlete: $\dfrac{3x + 4y - 21}{5} = 0$.

A BC egyenes normálegyenlete: $\dfrac{4x - 3y - 28}{5} = 0$.

A $O(0;\ v)$ középpontra felírhatjuk a következő egyenletet:
$$\left|\frac{4v - 21}{5}\right| = \left|\frac{-3v - 28}{5}\right|.$$

A deltoidba írható kör középpontjának koordinátái $O(0;\ -1)$.

Az OB egyenesre merőleges, és a B ponton átmenő egyenes egyenlete: $7x + y = 49$. A P pont koordinátái: $7x + \frac{21}{4} = 49$ egyenletből $P\left(\frac{175}{28}; \frac{21}{4}\right)$, illetve $P\left(\frac{25}{4}; \frac{21}{4}\right)$. A Q pont koordinátái: $Q\left(\frac{25}{3}; -\frac{28}{3}\right)$. A $PQRS$ egyenlő szárú trapéz, ezért $R\left(-\frac{25}{3}; -\frac{28}{3}\right)$, $S\left(-\frac{25}{4}; \frac{21}{4}\right)$. A PR átló egyenlete: $x - y = 1$, az SQ átlóegyenlete: $x + y = -1$. Mindkét átló átmegy az O ponton, mert O koordinátái mindkét egyenletet kielégítik.

3979. Az origónak az $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ egyenletű egyenesre eső merőleges vetülete legyen P. P koordinátái $x = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}$, $y = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}$ ahol $ab \neq 0$. Ekkor $x^2 + y^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$ = állandó. A mértani hely origó középpontú kör.

A kör sugarának négyzete $r^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$. A kör tengelypontjai (4 pont) nem tartoznak a mértani helyhez.

Körök kölcsönös helyzete, közös pontjaik meghatározása

3980. *a)* A két körnek egy közös pontja van, érintik egymást a $P(1; 0)$ pontban. *b)* $P_1\left(\frac{8+5\sqrt{14}}{13}; \frac{\sqrt{14}-1}{13}\right)$, $P_2\left(\frac{8-5\sqrt{14}}{13}; \frac{\sqrt{14}+1}{13}\right)$, *c)* $(-1; 1)$; *d)* $\left(-\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

3981. $P(3; 4)$ az érintési pont. A keresett kör középpontja rajta van az $y = x$ egyenletű egyenesen, mivel mindkét koordinátatengelyt érinti. Ezért $u = v$ és $r = |u|$. A kör egyenlete: $(x - u)^2 + (y - u)^2 = u^2$. Mivel a P pont illeszkedik a keresett körre, azért $(3 - u)^2 + (4 - u)^2 = u^2$. Innen $u = 7 \pm 2\sqrt{6}$. Megoldás: $\left[x - \left(7 \pm 2\sqrt{6}\right)\right]^2 + \left[y - \left(7 \pm 2\sqrt{6}\right)\right]^2 = \left(7 \pm 2\sqrt{6}\right)^2$.

3982. *a)* A körök közös pontjainak koordinátái: $P_1(0;0)$, $P_2(1;1)$. A keresett kör $K(u;v)$ középpontjára $KP_1 = KP_2$ és a sugár $r = \sqrt{5}$. $u^2 + v^2 = 5$ és $(u - 1)^2 + (v - 1)^2 = 5$. Két megoldás van: $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ és $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$. *b)* A kör középpontja a $(0; 0)$ és az $(1; 1)$ pontokat összekötő szakasz felezőpontja. Megoldás: $x^2 + y^2 - x - y = 0$.

3983. A körök közös pontjainak koordinátái: $P_1(-2; 1)$, $P_2\left(\frac{8}{5}; \frac{14}{5}\right)$. A keresett kör K középpontja az x tengelyen van, tehát a K koordinátái: $K(u; 0)$, másrészt $KP_1 = KP_2$.
$(u + 2)^2 + 1 = \left(u - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{196}{25}$. Innen $u = \frac{3}{4}$, $r^2 = \frac{137}{16}$. A kör egyenlete: $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{137}{16}$.

3984. A két kör közös pontjainak koordinátái: $P_1(2; -1)$, $P_2(1; -2)$. P_1, P_2 és az adott $P_3(2; -2)$ pontok derékszögű háromszöget feszítenek ki. A kör egyenlete:
$x^2 + y^2 - 3x + 3y + 4 = 0$.

3985. $P_1(1; 2)$, $P_2(5; 4)$.